ARTHUR ENGEL

PROBLEME DE MATEMATICĂ

strategii de rezolvare

Traducere de Mihai Bălună

Biblioteca Olimpiadelor de Matematică

20

Editura GIL

Cuprins

Prescurtări

MII	Maratonul intelectual internaţional (concurs de matematică/fizică)
OBM	Olimpiada balcanică de matematică
OIM	Olimpiada internaţională de matematică
OMAt	Olimpiada de matematică a Austriei
OMAu	Olimpiada de matematică a Australiei
OMBr	Olimpiada de matematică a Marii Britanii
OMC	Olimpiada de matematică a Chinei
OMG	Olimpiada de matematică a Germaniei
OML	Olimpiada de matematică din Leningrad
OMM	Olimpiada de matematică din Moscova
OMP	Olimpiada de matematică a Poloniei
OMPA	Olimpiada de matematică polono-austriacă
OMR	Olimpiada de matematică a întregii Rusii
OMSP	Olimpiada de matematică din Sankt-Petersburg
OMU	Olimpiada de matematică a Ungariei (concursul Kürschak)
OMUS	Olimpiada de matematică a întregii Uniuni Sovietice
OR	Olimpiada de matematică a Rusiei (OMR din 1994)
OSUA	Olimpiada de matematică a SUA
TO	Turneul oraşelor

1. Principiul invarianţilor

Aceasta este prima strategie avansată de rezolvare a problemelor. Ea este extrem de folositoare în rezolvarea anumitor tipuri de probleme dificile, care sunt uşor de reţinut. O vom arăta rezolvând probleme care folosesc această strategie. De fapt, se poate învăţa să rezolvi probleme doar rezolvând probleme. Dar acest lucru trebuie sprijinit prin strategii furnizate de către antrenor.

Prima strategie constă în *căutarea invarianţilor*. Acest principiu este aplicabil algoritmilor (jocuri, transformări). O anumită operaţie este realizată în mod repetat. **Ce rămâne la fel? Ce rămâne invariant?** Iată un precept uşor de amintit.

Dacă se repetă ceva, caută ceea ce rămâne neschimbat!

În algoritmi există o stare iniţială S şi un şir de paşi (mişcări, transformări). Căutăm răspunsuri la următoarele întrebări:

(1) Poate fi atinsă o anumită stare finală?
(2) Determinaţi toate stările finale care pot fi atinse.
(3) Există convergenţă către o anumită stare finală?
(4) Determinaţi toate perioadele, dacă există.

Deoarece principiul invarianţilor este un principiu euristic, el se învaţă cel mai bine prin experienţă, care poate fi câştigată rezolvând exemplele **E1-E10**.

E1. *Pornind cu un punct $S = (a, b)$ din plan, cu $0 < b < a$, generăm un şir de puncte (x_n, y_n) după regula*

$$x_0 = a, y_0 = b, x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}.$$

Studiaţi convergenţa şirurilor (x_n) şi (y_n).

Iată o cale uşoară de a găsi un invariant. Din $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$ pentru orice n deducem $x_n y_n = ab$ pentru orice n. Acesta este invariantul căutat. Avem iniţial $y_0 < x_0$. Această relaţie rămâne, de asemenea, invariantă. Într-adevăr, să presupunem $y_n < x_n$ pentru un anumit n. Atunci x_{n+1} este mijlocul segmentului cu capetele x_n, y_n. În plus, $y_{n+1} < x_{n+1}$ deoarece media armonică este mai mică decât cea aritmetică. Astfel

$$0 < x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \cdot \frac{x_n - y_n}{2} < \frac{x_n - y_n}{2}$$

pentru orice n. De aici $\lim x_n = \lim y_n = x$, cu $x^2 = ab$, deci $x = \sqrt{ab}$.

Aici invariantul ne-a ajutat; deşi recunoaşterea lui nu a dat soluţia completă, întregirea ei a fost banală.

E2. *Să presupunem că n este un întreg impar. La început, Al scrie pe tablă numerele $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Apoi alege la întâmplare două dintre numerele scrise, le şterge şi scrie pe tablă $|a - b|$. Demonstraţi că la sfârşit va rămâne un număr impar.*

Soluţie. Să notăm cu S suma numerelor existente pe tablă la un moment dat. La început $S = 1+2+\ldots+2n = n(2n+1)$ este număr impar. Fiecare pas micşorează S cu $2\min\{a, b\}$, care este număr par. Astfel, paritatea lui S este un *invariant*. Deoarece la început S este număr impar, rezultă că S este număr impar şi în final.

E3. *Un cerc este împărţit în şase sectoare. Apoi numerele* $1, 0, 1, 0, 0, 0$ *sunt scrise, în această ordine, în sectoare. La fiecare pas se pot mări două numere din sectoare vecine cu* 1. *Este posibil ca după câţiva paşi să obţinem şase numere egale?*

Soluţie. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_6$ numerele scrise la un moment dat. Atunci $i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ este un *invariant*. La început $i = 2$. De aceea situaţia $i = 0$ nu poate fi obţinută.

E4. *În parlamentul din Sikinia, fiecare membru are cel mult trei duşmani. Demonstraţi că deputaţii pot fi împărţiţi în două camere astfel încât fiecare să aibă cel mult un duşman împreună cu el.*

Soluţie. La început facem o împărţire arbitrară. Fie H suma numerelor duşmanilor pe care fiecare deputat îi are în camera în care se află. Apoi, dacă un deputat D are cel puţin doi duşmani împreună cu el, mutându-l în camera cealaltă H se micşorează. Această micşorare nu poate fi făcută la nesfârşit; la un moment dat H atinge o valoare minimă. În acest caz am obţinut împărţirea cerută.

Aici apare o idee nouă. Am construit o funcţie cu valori numere naturale care scade la fiecare pas al algoritmului. Ştim astfel că algoritmul se va termina, deoarece nu există un şir strict descrescător de numere naturale. Funcţia H nu este un invariant în sens propriu-zis, dar scade până când devine constantă. În această problemă, invariantul este relaţia de monotonie.

E5. *Să presupunem că întregii a, b, c, d nu sunt toţi egali. Pornim cu (a, b, c, d) şi înlocuim în mod repetat (x, y, z, t) cu $(x - y, y - z, z - t, t - x)$. Demonstraţi că măcar un număr al cvadrupului devine arbitrar de mare.*

Soluţie. Fie $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$ cvadruplul după n iteraţii. Atunci $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ pentru $n \geq 1$. Nu este clar cum am putea folosi acest invariant. Dar interpretarea geometrică ne va fi de mare ajutor. O funcţie importantă definită pe mulţimea punctelor spaţiului 4-dimensional este pătratul distanţei de la punct la origine, adică $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$. Dacă reuşim să dovedim că aceasta este nemărginită superior, demonstraţia este terminată.

Să căutăm o relaţie între P_n şi P_{n+1}:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n. \end{aligned}$$

Acum vom folosi $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$:

$$0 = (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 + 2a_nb_n + 2a_nd_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n.$$

Deducem astfel

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + (a_n + c_n)^2 + (b_n + d_n)^2 \\ &\geq 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \end{aligned}$$

Din această inegalitate rezultă că, pentru orice $n \geq 2$,

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2^{n-1}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2). \qquad (1)$$

Distanţa de la punctul P_n la origine creşte nemărginit, ceea ce înseamnă că măcar una dintre componente trebuie să devină arbitrar de mare.
Întrebare suplimentară: este posibil ca în (1) să avem întotdeauna egalitate?

Aici am învăţat că distanţa până la origine este o funcţie foarte importantă. Ea merită a fi considerată ori de câte ori avem un şir de puncte.

E6. *Un algoritm este definit după cum urmează:*
start: (x_0, y_0), *cu* $0 < x_0 < y_0$
continuare: $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}y_n}$.
Observăm, folosind şi inegalitatea mediilor, că

$$x_n < y_n \Rightarrow x_{n+1} < y_{n+1}, y_{n+1} - x_{n+1} < \frac{y_n - x_n}{2}$$

pentru orice n. Determinaţi limita comună $\lim x_n = \lim y_n = x = y$.

Soluţie. Aici invarianţii ne pot ajuta. Nu există însă metode sistematice de găsire a invarianţilor, ci doar mijloace euristice.

Acestea sunt metode care funcţionează adesea, dar nu totdeauna. Două asemenea metode sunt să urmărim modificările care apar în $\dfrac{x_n}{y_n}$ sau $y_n - x_n$, atunci când trecem de la n la $n+1$.

(a)

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_{n+1}y_n}} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{y_n}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{x_n}{y_n}}{2}}. \qquad (1)$$

Relaţia de aminteşte de formula $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \alpha \in [0,\pi)$.
Deoarece $0 < \frac{x_n}{y_n} < 1$, putem lua $\frac{x_n}{y_n} = \cos\alpha_n, \alpha_n \in [0, \frac{\pi}{2})$. Atunci (1) devi
$\cos\alpha_{n+1} = \cos\frac{\alpha_n}{2} \Rightarrow \alpha_n = \frac{\alpha_0}{2^n} \Rightarrow 2^n\alpha_n = \alpha_0$ ceeea ce este echivalent cu

$$2^n \arccos\frac{x_n}{y_n} = \arccos\frac{x_0}{y_0} \tag{2}$$

Iată deci un invariant!

(b) Ca să evităm radicali vom considera $y_n^2 - x_n^2$ în loc de $y_n - x_n$ şi avem

$$y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 = \frac{y_n^2 - x_n^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2} = \sqrt{y_n^2 - x_n^2},$$

deci

$$2^n\sqrt{y_n^2 - x_n^2} = \sqrt{y_0^2 - x_0^2} \tag{3}$$

care este al doilea invariant.
Din (2) şi din (3) rezultă

$$\arccos\frac{x_0}{y_0} = 2^n \arccos\frac{x_n}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_n^2 - x_n^2}}{y_n} = 2^n \arcsin\frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{2^n y_n}$$

Membrul drept tinde la $\frac{\sqrt{y_o^2 - x_0^2}}{y}$. Obţinem astfel

$$x = y = \frac{\sqrt{y_0^2 - x_0^2}}{\arccos\frac{x_0}{y_0}}.$$

Rezolvarea acestei probleme fără a folosi invarianţi este practic imposibilă. De altfel, aceasta este o problemă grea pentru orice nivel.

E7 *Fiecare din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este 1 sau -1 şi*

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Demonstraţi că $4|n$.

Soluţie. Problema poate fi rezolvată şi prin folosirea invarianţei. Dacă înlocuim un a_i prin $-a_i$, atunci S nu se schimbă mod 4 deoarece îşi schimbă semnul exact patru termeni. Într-adevăr, dacă doi termeni sunt pozitivi şi doi negativi atunci nu se schimbă nimic, dacă trei termeni au acelaşi semn S se schimbă cu ± 4, iar dacă termenii sunt egali atunci S se modifică cu ± 8.
La început $S = 0$, deci $S \equiv 0 \pmod 4$ şi dacă facem toţi termenii pozitivi atunci $S = n$ de unde rezultă $4|n$.

E8. *La un banchet sunt invitaţi $2n$ ambasadori. Fiecare ambasador are cel mult $n-1$ duşmani. Demonstraţi că ambasadorii pot fi aşezaţi la o masă rotundă astfel* *încât nimeni să nu stea lângă un duşman.*

Soluţie La început aşezăm ambasadorii oricum. Fie H numărul perechilor de vecini ostili. Trebuie să găsim un algoritm care să reducă acest număr atât timp cât $H > 0$. Fie (A,B) un cuplu ostil, cu B la dreapta lui A (figura 1.1). Trebuie să-i separăm astfel încât să producem un deranj cât mai mic. Acesta se va îndeplini dacă inversăm un arc BA', obţinând figura 1.2.

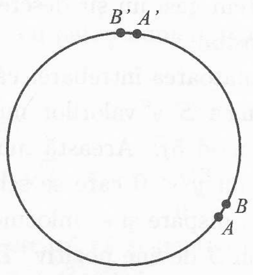

Fig. 1.1

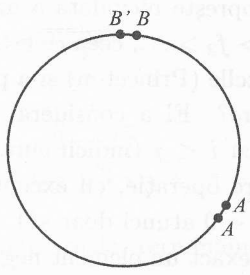

Fig. 1.2

H se va reduce dacă (A,A') şi (B,B') sunt cupluri prietene. Rămâne să arătăm că un asemenea cuplu există totdeauna. Pornim din A şi mergem în jurul mesei în sens trigonometric. Vom întâlni cel putin n prieteni ai lui A. La dreapta lor există cel puţin n scaune. Acestea nu pot fi toate ocupate de duşmanii lui B, deoarece B are cel mult $n-1$ duşmani. Astfel, există un prieten A' al lui A care are la dreapta sa un prieten B' al lui B.

Observaţie. Problema este asemănătoare cu **E4**, dar mult mai grea. Ea reprezintă următoarea teoremă de teoria grafurilor: *Fie G un graf cu n vârfuri. Dacă suma gradelor pentru orice două vârfuri este cel puţin $n-1$ atunci G are un lanţ hamiltonian.* În cazul special analizat am dovedit că există chiar un ciclu hamiltonian.[1]

E9. *Fiecărui vârf al unui pentagon îi asociem câte un întreg x_i, astfel încât să avem $s = \sum_{1 \leq i \leq 5} x_i > 0$. Dacă x, y, z sunt numerele asociate la trei vârfuri consecutive şi $y < 0$ atunci înlocuim (x, y, z) cu $(x + y, -y, y + z)$. Aceasta operaţie este făcută atâta timp cât există un $y < 0$. Decideţi dacă algoritmul se opreşte totdeauna.* (Cea mai dificilă problemă de la OIM 1986)

Soluţie. Algoritmul se opreşte întotdeauna. Ideea demonstraţiei este (ca la **E4** şi **E8**) să găsim o funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de etichetele vâfurilor, cu valori naturale,

[1]Lanţ hamiltonian = şir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care conţine toate cele n vârfuri ale grafului şi orice două vârfuri consecutive sunt unite printr-o muchie. (Nota traducerii)

Ciclu hamiltonian = şir $x_0, x_1, \ldots, x_n$ care conţine cele n vârfuri ale grafului, $x_0 = x_n$ şi oricare două vârfuri consecutive sunt unite printr- o muchie (a se vedea, de exemplu, ,,Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor" de I.Tomescu, E.D.P., 1980) (Nota traducerii) ale cărei valori descresc în urma efectuării operaţiei descrise. Zece din cei 11 elevi care au rezolvat problema au găsit aceeaşi funcţie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{5}(x_i - x_{i+2})^2, x_6 = x_1, x_7 = x_2.$$

Să presupunem că $y = x_4 < 0$. Atunci $f_{nou} - f_{vechi} = 2sx_4 < 0$, deoarece $s > 0$. Dacă algoritmul nu se opreşte niciodată atunci putem găsi un şir descrescător de numere naturale $f_0 > f_1 > f_2 > \ldots$, ceea ce este imposibil.

Bernard Chazelle (Princeton) şi-a pus următoarea întrebare: câţi paşi sunt necesari până la oprire? El a considerat mulţimea S a valorilor numerelor $s(i, j) = x_i + \ldots + x_{j-1}$, cu $i < j$ (indicii sunt luaţi mod 5). Această mulţime este invariantă pentru fiecare operaţie, cu excepţia acelui $y < 0$ care se schimbă în $-y$. De exemplu, dacă $x_4 < 0$ atunci doar $s(4, 4) = x_4$ dispare şi se înlocuieşte cu $-x_4$. Astfel, la fiecare pas exact un element negativ din S devine pozitiv. Deoarece $s > 0$, în S există un număr finit de termeni negativi. Numărul paşilor până la oprire este egal cu numărul elementelor negative din S. Remarcăm şi că nu este necesar ca x_i sa fie întregi.

Observaţie Este interesant să găsim o formulă cu ajutorul unui calculator, care pentru valorile de intrare a, b, c, d, e să dea numărul paşilor necesari până la oprire. Aceasta poate fi făcută uşor dacă $s = 1$. De exemplu, intrarea $(n, n, 1 - 4n, n, n)$ dă numărul de paşi $f(n) = 20n - 10$.

E10. Numere pozitive care se micşorează. Cercetare empirică. *Să pornim cu un şir $S = (a, b, c, d)$ de întregi pozitivi şi să construim $S_1 = T(S) = (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$. Se termină întotdeauna şirul $S, S_1, S_2 \ldots$, cu $(0, 0, 0, 0)$?*

Soluţie Să adunăm material pentru indicaţii de rezolvare:

$(0, 3, 10, 13) \to (3, 7, 3, 13) \to (4, 4, 10, 10) \to (0, 6, 0, 6) \to (6, 6, 6, 6) \to (0, 0, 0, 0)$;
$(8, 17, 3, 107) \to (9, 14, 104, 99) \to (5, 90, 5, 90) \to (85, 85, 85, 85) \to (0, 0, 0, 0)$;
$(91, 108, 95, 294) \to (17, 13, 99, 203) \to (4, 86, 104, 186) \to (82, 18, 82, 182) \to$
$\to (64, 64, 100, 100) \to (0, 36, 0, 36) \to (0, 0, 0, 0)$.

Observaţii:

(1) Să notăm cu $\max S$ elementul maximal din S. Atunci $\max S_{i+1} \le \max S_i$ şi $\max S_{i+4} < \max S_i$ atâta timp cât $\max S_i > 0$. Verificaţi aceste observaţii. Aceasta rezolvă conjectura propusă.

(2) $S = (a, b, c, d)$ şi $tS = (ta, tb, tc, td)$ au aceeaşi „durată de viaţă".

(3) După cel mult patru paşi, toţi cei patru termeni devin pari. Într-adevăr, este suficient să calculăm mod2. Datorită simetriei ciclice este nevoie să analizăm doar cele şase şiruri $0001 \to 0011 \to 0101 \to 1111 \to 0000$ şi $1110 \to 0011$. Astfel, afirmaţia este dovedită. După cel mult patru paşi fiecare termen este

divizibil cu 2, după cel mult opt paşi este divizibil cu 2^2,..., după cel mult $4k$ paşi este divizibil cu 2^k. Când $\max S < 2^k$, toţi termenii sunt 0.

În observaţia 1 am folosit o altă strategie, **principiul extremal: Alege elementul extremal!** Capitolul 3 este dedicat acestui principiu.

În observaţia 3 am folosit **simetria**. Este bine să ne gândim totdeauna la această strategie, deşi nu am alocat un capitol acestei idei.

Generalizări:

(a) Să pornim cu patru numere reale, de exemplu

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2} & \pi & \sqrt{3} & e \\ \pi-\sqrt{2} & \pi-\sqrt{3} & e-\sqrt{3} & e-\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \pi-e & \sqrt{3}-\sqrt{2} & \pi-e \\ \pi-e-\sqrt{3}+\sqrt{2} & \pi-e-\sqrt{3}+\sqrt{2} & \pi-e-\sqrt{3}+\sqrt{2} & \pi-e-\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Alte încercări sugerează că şi pentru cvadrupluri reale, terminăm tot cu $(0,0,0,0)$. Dar $t>1$ şi $S=(1,t,t^2,t^3)$ dau

$$T(S)=(t-1,t(t-1),t^2(t-1),(t^2+t+1)(t-1)).$$

Dacă $t^2+t+1=t^3$, adică $t=1.8392867552\ldots$ atunci procesul nu se termină niciodată, conform observaţiei 2. Acest t este unic, daca facem abstracţie de o transformare de forma $f(t)=at+b$.

(b) Să pornim cu $S=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$, a_i numere naturale.

Pentru $n=2$, ajungem la $(0,0)$ după cel mult doi paşi.

Pentru $n=3$, 011 dă un ciclu de lungime trei : $011\to101\to110\to011$.

Pentru $n=5$ avem $00011\to00101\to01111\to10001\to10010\to10111\to11000\to01001\to11011\to01100\to10100\to11101\to00110\to01010\to11110\to00011$, care generează un ciclu de lungime 15.

(1) Găsiţi perioadele pentru $n=6$ ($n=7$) pornind de la 000011 (0000011).

(2) Demonstraţi că dacă $n=8$ şi pornim cu 00000011 algoritmul se opreşte.

(3) Demonstraţi că dacă $n=2^r$, r natural, ajungem la $(0,0,...,0)$ şi, dacă $n\neq 2^r$, obţinem (cu câteva excepţii) un ciclu care conţine doar numere 0 şi, de un număr par de ori, un număr $a>0$. Datorită observaţiei 2 putem face calculele în $\mathbb{Z}_2$.

(4) Fie $n\neq 2^r$ şi $c(n)$ lungimea ciclului. Demonstraţi că $c(2n)=2c(n)$ (în afară de câteva excepţii).

(5) Demonstraţi că, dacă n este impar, $S=(0,0,\ldots,1,1)$ aparţine unui ciclu.

(6) Algebrizare. Şirului $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ îi asociem funcţia polinomială $p(x)=a_{n-1}+a_{n-2}x+\ldots+a_0x^{n-1}$ cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_2$, iar $x^n=1$. Atunci lui $T(S)$ i se asociază funcţia $(1+x)p(x)$. Dacă puteţi, folosiţi această algebrizare.

(7) Tabela următoare a fost generată cu ajutorul unui calculator. Intuiţi cât mai multe proprietăţi pentru $c(n)$ şi demonstraţi cât mai multe dintre ele.

n	3	5	7	9	11	13	15
$c(n)$	3	15	7	63	341	819	15
n	17	19	21	23	25	27	29
$c(n)$	255	9709	63	2047	25575	13797	47507
n	31	33	35	37	39	41	43
$c(n)$	31	1023	4095	3233097	4095	41943	5461

Probleme

1. Pornim cu întregii pozitivi $1, 2, \ldots, 4n-1$. La fiecare operaţie înlocuim doi întregi prin diferenţa lor. Demonstraţi că la sfârşit rămâne un număr par.

2. Pornim cu mulţimea $\{3, 4, 12\}$. La fiecare operaţie alegem două numere a, b şi le înlocuim cu $\frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b$ şi $\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$. Se poate obţine după câteva repetări una dintre situaţiile (a) sau (b)?
   (a) $\{4, 6, 12\}$;
   (b) $\{x, y, z\}$ cu $|x-4|, |y-6|, |z-12|$ fiecare mai mic decât $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

3. Avem o tablă de şah 8×8 colorată obişnuit. Se pot schimba culorile din toate pătratele:
   (a) unei linii sau unei coloane;
   (b) unui pătrat 2×2.
   Scopul este de a obţine un singur pătrat negru. Se poate atinge acest scop?

4. Pornim cu starea (a, b) unde a, b sunt întregi pozitivi. Acestei stări iniţiale îi aplicăm algoritmul următor:

   while $(a > 0)$ **do**
   if $a < b$ **then** $(a, b) \leftarrow (2a, b-a)$ **else** $(a, b) \leftarrow (a-b, 2b)$.

   Pentru ce valori de pornire se termină algoritmul? În câţi paşi se opreşte, dacă se întâmplă acest lucru? Ce puteţi spune despre perioade şi partea neperiodică? Aceleaşi întrebări dacă a, b sunt numere reale.

5. Pe un cerc se aşează cinci cifre 1 şi patru 0, într-o ordine arbitrară. Apoi, între orice două cifre egale se scrie 0 şi între cifre diferite se scrie 1, iar cifrele iniţiale

sunt şterse. Oricât am repeta procesul, nu vom obţine niciodată nouă cifre 0. Generalizare.

6. Se dau a fise albe, n fise negre şi r fise roşii. La fiecare pas se aleg două fise de culori diferite şi se înlocuiesc cu o singură fisă de a treia culoare. Arătaţi că dacă la sfârşit rămâne o singură fisă, culoarea ei nu depinde de paşii făcuţi. În ce caz poate fi obţinută această stare finală?

7. Se dau a fise albe, n fise negre şi r fise roşii. La fiecare pas se aleg două fise de culori diferite şi se înlocuiesc cu două fise având a treia culoare. Găsiţi condiţii în care putem obţine ca toate fisele să aibă aceeaşi culoare. Dacă la început distribuţia fiselor este $(13, 15, 17)$ putem să obţinem toate fisele de aceeaşi culoare? Ce stări pot fi obţinute pornind de la aceste numere?

8. În fiecare pătrat al unei table dreptunghiulare este câte un întreg pozitiv. La fiecare mişcare se pot dubla numerele de pe o linie sau micşora cu 1 toate numerele unei coloane. Demonstraţi că există o secvenţă de mişcări astfel încât după efectuarea lor numerele de pe tablă devin 0.

9. Fiecare din numerele de la 1 la 10^6 este înlocuit în mod repetat cu suma cifrelor sale, până când oţinem 10^6 numere cu o cifră. Ce vom obţine: mai mulţi 1 sau mai mulţi 2?

10. Vârfurile unui n-gon sunt etichetate cu numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fie a, b, c, d patru etichete succesive. În cazul $(a-d)(b-c) < 0$, putem schimba între ele b şi c. Decideţi dacă aceste schimbări se pot efectua la nesfârşit.

11. În figura 1.3 se pot schimba semnele tuturor numerelor de pe o linie, coloană, sau paralelă la o diagonală. În particular, se poate schimba semnul pentru numărul dintr-un pătrat situat într-un colţ. Demonstraţi că pe tablă rămâne tot timpul cel puţin un -1.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1

Fig.1.3

12. Pe un rând sunt scrişi 1000 de întregi. Un al doilea rând este construit dedesubt, după cum urmează. Sub fiecare număr a de pe primul rând se află un întreg pozitiv $f(a)$ care este egal cu numărul de apariţii ale lui a pe primul rând. În mod asemănător construim un al treilea rând pornind de la al doilea, etc. Demonstraţi

că în cele din urmă un rând va fi egal cu următorul.

13. În fiecare pătrat al unei table de şah 8×8 este un întreg. La o mişcare putem alege orice pătrat 4×4 sau 3×3 şi să mărim cu 1 fiecare număr din pătratul ales. Se poate întotdeauna obţine ca toate numerele existente la un moment dat să fie divizibile cu: (a) 2; (b) 3?

14. Tăiem prima cifră a numărului 7^{1996} şi o adunăm la numărul rămas. Repetăm aceasta până când rămâne un număr cu 10 cifre. Demonstraţi că acest număr are două cifre egale.

15. În punctul (1,1) se află un pion. La fiecare mişcare se poate dubla una din coodonate, sau se poate micşora coordonata mai mare cu un număr egal cu coordonata mai mică. În ce puncte poate ajunge pionul?

16. Fiecare termen al şirului $1, 0, 1, 0, \ldots$ începând cu al şaptelea este suma ultimilor 6 termeni mod 10. Demonstraţi că secvenţa $\ldots, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$ nu apare niciodată.

17. Pornind cu orice 35 de întregi, putem alege 23 dintre ei şi să adăugăm 1 fiecăruia. Demonstraţi că repetând în mod convenabil această operaţie putem obţine 35 de întregi egali. Înlocuiţi acum 35 şi 23 cu m şi n. Ce condiţii trebuie să verifice m, n pentru ca egalizarea să rămână posibilă?

18. Întregii $1, 2, \ldots, 2n$ sunt puşi arbitrar pe $2n$ locuri, numerotate $1, 2, \ldots, 2n$. Adunăm acum la fiecare întreg numărul locului pe care se află. Demonstraţi că printre sume se găsesc două care dau acelaşi rest modulo $2n$.

19. Cele n găuri ale unei prize sunt aşezate pe un cerc, la distanţe egale, şi numerotate $1, 2, \ldots, n$. Pentru ce valori ale lui n este posibil să numerotăm picioruşele unui ştecher de la 1 la n, astfel încât, oricum am introduce ştecherul în priză, cel puţin unul din picioruşe nimereşte într-o gaură cu acelaşi număr?

20. Un joc prin care putem calcula c.m.m.d.c. (a, b) şi c.m.m.m.c $[a, b]$. Pornim cu $x = a, y = b, u = a, v = b$ şi facem următoarele mişcări:
    dacă $x < y$ atunci înlocuim y cu $y - x$ şi v cu $u + v$;
    dacă $x > y$ atunci înlocuim x cu $x - y$ şi u cu $u + v$.
    Jocul se termină cu $x = y =$ c.m.m.d.c. (a, b) şi $\frac{u+v}{2} =$ c.m.m.m.c. $[a, b]$. Dovediţi!